תנועה בראונית ומהלכים אקראיים

תרומתו של אינשטיין לפיסיקה הסטטיסטית והשלכותיה על מדע עכשווי

מאת: דוד אנדלמן וחיים דימנט

העשרה

תקציר

התמורה הגדולה שעברה הפיסיקה במאה העשרים נשענת על שלוש רגליים מהפכניות. שתיים מהן - תורת היחסות ותורת הקוונטים - מוכרות היטב. במאמר זה נתמקד בתרומתו הייחודית של אלברט אינשטיין למהפכה השלישית, הנודעת פחות - הפיסיקה הסטטיסטית. במאמר מהפכני מ-1905 הראה אינשטיין, כיצד ניתן להסיק מתנועתו האקראית של חלקיק מיקרוני (חלקיק אבקת פרחים) על תהליכים מיקרוסקופיים (תנועה של מולקולות נוזל), ובכך להכריע את המחלוקת סביב נכונותה של התמונה האטומית ותקפותה של הפיסיקה הסטטיסטית. לתרומתו של אינשטיין, הנוגעת לחשיבותם של מהלכים אקראיים, יש השלכות מרחיקות לכת על תחומי מדע מגוונים בימינו אנו. בעשורים האחרונים אנו עדים יותר ויותר למחקרים שכיוונם הפוך, בבחינת "תנועה חזרה אל אבקת הפרחים": כיצד ניתן להסיק ולנבא מתוך ידיעותינו ההולכות ורבות אודות התהליכים האקראיים המתרחשים ברמה המולקולרית את התנהגותן של מערכות גדולות ומורכבות, כגון התא החי, האורגניזם, האטמוספרה, או שוק המניות.

מהפכת הפיסיקה הסטטיסטית

שלוש מהפכות מדעיות שינו את פני הפיסיקה בראשית המאה העשרים. אלברט אינשטיין, בהיותו בן 26, תרם תרומות מכריעות לכל אחת משלושתן, וכל זאת באותה שנה מופלאה 1905 , (annus mirabilis). תורת היחסות שינתה כליל את הדרך בה אנו תופשים את מושגי המרחב והזמן, ואילו תורת הקוונטים הפכה על פיהן את תפישותינו בדבר חוקי היסוד השולטים בתנועתם של גופים, מדידת גדלים פיסיקליים ותיאור המציאות עצמה. המהפכה השלישית - הפיסיקה הסטטיסטית - זכתה ליחסי ציבור מוצלחים פחות, למרות שמבין השלוש היא זו הנוגעת בחיי היומיום שלנו ביותר.

הפיסיקה הסטטיסטית היא התורה המאפשרת לנו לקשר בין תכונותיהן של מערכות רבות-מרכיבים (למשל, הנייר או הצג בהם אתם קוראים עתה) לבין תכונות המרכיבים המיקרוסקופיים עצמם (כלומר, האטומים או המולקולות), יחסי הגומלין שביניהם ומגעם עם הסביבה. זו התורה העומדת מאחורי הבנתנו מדוע חומרים נמצאים במצבי צבירה שונים, כיצד הם עוברים ממצב צבירה אחד לאחר, מה קובע את תכונותיהם האלסטיות, התֶרמיות, החשמליות או המגנטיות, וכיצד משפיעים על כל אלה גורמים כמו טמפרטורה ולחץ. לדוגמא, הפיסיקה הסטטיסטית (כמו גם תורת הקוונטים) היא מרכיב חיוני בהסבר התכונות החשמליות של מוצקים, ומכאן גם בפיתוח המוליכים-למחצה ומהפכת המחשוב שבאה אחר כך.

לסיפור אישושה של הפיסיקה הסטטיסטית, והתמונה האטומית של החומר הנגזרת ממנה, יש היסטוריה של כמעט 200 שנה. הסיפור מתחיל מכיוון מפתיע - לא מפיסיקה או כימיה, אלא מבוטניקה דווקא, עם עבודותיו של מדען בריטי בשם רוברט בראון, וזאת כ-80 שנה לפני עבודתו של אינשטיין.

ריקוד אבקת הפרחים של בראון

בתחילת המאה ה-19 פרח מדע הבוטניקה ומשלחות רבות, בעיקר בריטיות, חזרו מכל קצוות תבל עם מגוון עצום של מינים חדשים של צמחים. בשנת 1827 התבונן רוברט בראון (Brown), אחד הבוטנאים המובילים בבריטניה ובעולם באותה עת, מבעד למיקרוסקופ שלו בתרחיף במים של גרגרי אבקה של פרחים. להפתעתו לא עמדו הגרגרים במנוחה אלא נעו ללא הרף בריקוד אקראי אינסופי. תחילה סבר בראון כי הגרגרים חיים! אולם בפקחותו וזהירותו ניסה לצפות בחלקיקים בעלי גודל דומה של כמה מיקרונים (מיקרומטרים), העשויים מחומר אנ-אורגני, כגון אבק או פיח. גם חלקיקים אלה רקדו ריקוד דומה. היה ברור, אפוא, כי תנועה זו, שנקראה

לאחר מכן תנועה בראונית, איננה תופעה ביולוגית אלא פיסיקלית.

התנועה הבראונית נותרה ללא הסבר מספק במשך עשרות שנים. הראשון שהעלה את הסברה כי היא קשורה לאופי החלקיקי הבדיד של הנוזל המקיף את הגרגרים, כלומר לתנועה תרמית של מולקולות המים והתנגשויותיהן עם הגרגרים, היה המדען הבלגי Joseph Delsaux ב-1877, והראשון שניסה לבחון סברה זו ביסודיות היה **הפיסיקאי** הצרפתי Louis Gouy ב-1888. Gouy הראה כי קצב התנועה הבראונית עומד ביחס הפוך לצמיגות הנוזל בו מרחפים הגרגרים. אולם היה זה אלברט אינשטיין שניסח לראשונה תיאוריה שלמה של התופעה. יתרה מזאת, הוא הבין את חשיבותה כאבן בוחן ניסויית, אשר ניתנת למדידה במיקרוסקופ פשוט, לתקפותה של הפיסיקה הסטטיסטית.

התנגשות בין שתי גישות

לפני שניגש אל מאמרו של אינשטיין על התנועה הבראונית, עלינו להעריך נכונה את הנסיבות אל תוכן הוטל ב-1905. יש להבין, כי בתחילת המאה העשרים לא הייתה התפישה לפיה יש לתאר את החומרים כמורכבים מאטומים או מולקולות בגדר מובן מאליו. להיפך! היה זה סלע המחלוקת בין שתי אסכולות שהתעמתו בלהט.

בצד אחד עמדה אחת מגולות הכותרת של הפיסיקה במאה התשע-עשרה - התרמודינמיקה - אשר סיפקה תיאור מדויק להתנהגותם של חומרים מאקרוסקופיים תוך התייחסות אליהם כאל **רצף**, ולא כאל אוסף של **חלקיקים בדידים**. התרמודינמיקה היא תורה דטרמיניסטית, המנבאת בוודאות כיצד יגיב החומר לשינויי טמפרטורה או לחץ, מתי ישנה את מצב הצבירה שלו וכדומה. ניבוייה של התרמודינמיקה אושרו בדיוק רב בניסויים רבים שנערכו במאה ה-19.

מנגד עמדו עבודותיהם של Ludwig Boltzmann האוסטרי ו- James Clerk Maxwell הבריטי - מאבות הפיסיקה הסטטיסטית ומחשובי המדענים במאה ה-19. בעבודותיהם על "התורה המולקולרית-קינטית של חום" (כך נקראה אז הפיסיקה הסטטיסטית) הם גרסו, כי התכונות המאקרוסקופיות של חומרים ניתנות להיגזר כתוצאות סטטיסטיות מן התנועה ויחסי הגומלין של מספר עצום (מסדר גודל של מספר אבוגדרו) של חלקיקים בדידים. תורה זו איננה דטרמיניסטית ומתייחסת אל תכונותיהם הנמדדות של חומרים (למשל, לחץ או צפיפות) כאל גדלים סטטיסטיים בעלי ממוצע, סטיית תקן וכדומה.

למרות הצטברות עדויות משכנעות כבר במאה ה-19, בעיקר מתחום הכימיה, לכך שכל החומרים מורכבים מחלקיקים בדידים, מולקולות, ואלה מורכבות מחלקיקים בסיסיים יותר, אטומים, חלק ניכר מן המדענים בסוף המאה התשע-עשרה ותחילת המאה העשרים, ובראשם הפיסיקאים ארנסט מאך (Mach) האוסטרי (שעל שמו קרויה מהירות הקול) ו-וילהלם אוסטוואלד (Ostwald) הגרמני, דבקו בתורת הרצף והתרמודינמיקה כגישה הנכונה היחידה לתיאור התנהגותם של חומרים מאקרוסקופיים. לגרסתם, לא רק שלא ניתן כלל לצפות באטומים, אלא, מאחר שבתיאור התנהגות של חומרים אנו מתעניינים בתכונות מאקרוסקופיות בלבד (כגון נפח, לחץ, צפיפות), הרי שאין כל צורך או טעם בתורה אטומית! על כך העיר אחר-כך Jean Perrin, האיש שאישר בניסוי את תחזיותיו של אינשטיין: "קשה מאוד להבין גישה זו, שכן מה שאיננו נגיש כיום יכול להיות נגיש מחר... והנחות קוהרנטיות ביחס למה שהוא עדיין בגדר בלתי-נראה עשויות לשפר את הבנתנו ביחס לנראה."

כיום אנו יודעים כי שתי התורות אינן מתנגשות זו בזו, וחוקי התרמודינמיקה אינם אלא תוצאה מאקרוסקופית של חוקי הפיסיקה הסטטיסטית. מעניין לציין כי שרידי הדו-ערכיות הזו עודם חיים וקיימים. הם משתקפים, למשל, בתוכניות הלימודים ובספרי הלימוד לתואר ראשון בפיסיקה וכימיה - בעוד שבחלק מן האוניברסיטאות לומדים הסטודנטים את חוקי התרמודינמיקה והפיסיקה הסטטיסטית בקורס מאוחד, אוניברסיטאות אחרות מעדיפות עדיין ללמד את שתי התורות כשני תחומים נפרדים.

מאמרו של אינשטיין על תנועה בראונית

בשנת 1905, אותה שנה בה פרסם אינשטיין את עבודותיו הנודעות על תורת היחסות ועל התורה הקוונטית של האור (האפקט הפוטואלקטרי), התפרסם מאמר נוסף שלו שכותרתו: "על תנועתם של חלקיקים קטנים

המרחפים בנוזל נייח כמתחייב מהתורה המולקולרית-קינטית של חום". בפתיחת המאמר מעיר אינשטיין בזהירות אופיינית, כי יתכן שהתנועה בה דן זהה לתנועה הבראונית. אולם מעבר להסבר התנועה הבראונית, אינשטיין היה מודע לגמרי למשמעות העמוקה האמיתית של עבודתו: "אם ניתן יהיה לראות את התנועה הנדונה כאן (יחד עם החוקים הקשורים אליה), אזי לא ניתן יהיה להתייחס יותר אל התרמודינמיקה הקלאסית כתקפה [במובן זה שאיננה מספקת אלא תיאור חלקי] אפילו עבור גופים בעלי ממדים הניתנים להבחנה במיקרוסקופ: קביעה מדויקת של הממדים האטומיים תהא אז אפשרית. מאידך, אם הניבוי של תנועה זו יוכח כשגוי, או-אז יספק הדבר טיעון כבד-משקל כנגד התפישה המולקולרית-קינטית של חום."

מכיוון שלא ניתן לראות אטומים (בזמנו של אינשטיין) - הם פשוט קטנים ומהירים מדי - אולי ניתן יהיה להקיש על קיומם על ידי שימוש בחוקי הפיסיקה הסטטיסטית עבור חלקיקים שאפשר לראותם?

יחס אינשטיין - הקשר בין חיכוך לדיפוזיה

מן התרמודינמיקה היה ידוע זה כבר, כי הפרשי ריכוז בתמיסה יוצרים תופעות כגון לחץ אוסמוטי ודיפוזיה (פעפוע). אנו יכולים לדוגמא לחצוץ בין שני חלקי נוזל - באחד נמצאת תמיסה דלילה של מומס ובשני הממס בלבד - באמצעות מחיצה (ממברנה) עבירה-למחצה, המאפשרת מעבר של הממס אך לא של המומס. החומר המומס יפעיל אז לחץ אוסמוטי p על המחיצה, שהוא מתכונתי לריכוזו c בדומה ללחץ של גז אידיאלי,

$$p = \frac{RT}{N_A} c \qquad (1)$$

כאשר R הוא קבוע הגזים, T הטמפרטורה, ו-N_A מספר אבוגדרו. אם נסיר את המחיצה, יתרחש תהליך דיפוזיה שבסופו תתקבל תמיסה אחידה. חוק פיק (Fick, 1855) קובע כי במהלך הדיפוזיה צפיפות הזרם של המומס מאזור מרוכז לאזור דליל תהיה מתכונתית למפל הריכוז,

$$j_D = -D \frac{\partial c}{\partial x} \qquad (2)$$

כאשר מקדם הפרופורציה D נקרא מקדם הדיפוזיה. משוואת הדיפוזיה עבור ריכוז המומס בזמן ובמיקום מתקבלת מחוק פיק על-ידי הפעלת חוק שימור המסה,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j_D}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad (3)$$

זוהי משוואה המקשרת בין הנגזרת הראשונה של הריכוז בזמן לבין הנגזרת השנייה לפי המיקום $\partial^2 c/\partial x^2$.

הבחנתו הראשונה של אינשטיין הייתה כי מבחינת הפיסיקה הסטטיסטית אין הבדל איכותי בין מולקולות בתמיסה לבין חלקיקים מיקרומטרים בתרחיף דוגמת חלקיקיו של בראון; ההבדל הוא כמותי בלבד - בגודלם של החלקיקים. (לנו נשמעת טענה זו טבעית, אך יש לזכור שוב, כי בתמונה התרמודינמית ששלטה במאה ה-19 התמיסה הייתה תווך רציף, שאינו מורכב ממולקולות בדידות.) אם כך, הרי שחלקיקים בגודל מיקרון יכולים אף הם להפעיל לחץ אוסמוטי ולעבור דיפוזיה, בדיוק לפי אותם החוקים (1)-(3).

הבחנה זו אפשרה לאינשטיין לחשב את מקדם הדיפוזיה של התרחיף. לשם כך נדמיין כי על החלקיקים פועל כוח חיצוני F (למשל כבידה). מחד, בשיווי-משקל תרמודינמי מאוזן הכוח החיצוני ליחידת נפח (השקול למכפלת הכוח F בריכוז c) על-ידי מפל לחץ אוסמוטי - בדיוק כשם שכוח הכבידה גורם למפל הלחץ באטמוספרה,

$$cF = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{RT}{N_A} \frac{\partial c}{\partial x} \qquad (4)$$

מאידך, כאשר החלקיקים מגיעים למהירות קבועה v, מאוזן הכוח על כל חלקיק על-ידי חיכוך עם הנוזל, $F = \gamma v$, כאשר γ הוא מקדם החיכוך. זרם החלקיקים אותו יוצר הכוח החיצוני הוא, אפוא,

$$j_F = cv = \frac{cF}{\gamma} = \frac{RT}{N_A \gamma} \frac{\partial c}{\partial x} \qquad (5)$$

אולם במצב עמיד חייב זרם זה להתאזן על-ידי זרם דיפוזיה, כך שהזרם הכולל מתאפס, $j_F + j_D = 0$. ממשוואות (2) ו- (5) זיהה לפיכך אינשטיין את הקשר,

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma} \qquad (6)$$

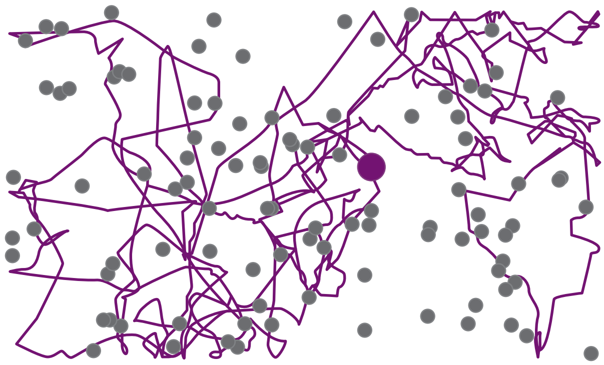
תוצאה אלגנטית זו, הקושרת בין מקדם החיכוך של החלקיק, γ, לבין מקדם הדיפוזיה שלו, D, נקראת עד היום **יחס אינשטיין**. היחס קושר בין שתי תופעות שהן לכאורה שונות בתכלית - חיכוך ודיפוזיה - וזאת באמצעות הטמפרטורה בלבד ושני קבועים אוניברסליים:

קבוע הגזים R ומספר אבוגדרו N_A. ליחס אינשטיין נודע תפקיד מרכזי באישושה הניסיוני של התמונה האטומית, כפי שיתואר בהמשך.

נעיר כאן כי מדען אוסטרלי בשם וויליאם סאתרלנד (William Sutherland) פרסם תוצאה דומה באותה השנה, 1905, וללא קשר לאינשטיין. לכן יש הנוטים לקרוא ל-(6) יחס אינשטיין-סאתרלנד. תרומתו של סאתרלנד נשכחה עם השנים, ורק לאחרונה התגלתה מחדש (הסבר מקיף על עבודתו של סאתרלנד ניתן למצוא בביוגרפיה של אינשטיין מאת פאיס [2]).

הקשר בין דיפוזיה לתנועה בראונית

ההבחנה המרכזית השנייה במאמרו של אינשטיין היא כי ניתן לקבל את משוואת הדיפוזיה הרציפה (3) כתוצאה סטטיסטית ממהלכים אקראיים של חלקיקים בדידים, קרי, מתנועה בראונית.



איור 1: הדמיית מחשב של דיפוזיה בתמיסה. חלקיק גדול בתוך קופסא המתנגש ללא הרף עם כ-100 חלקיקים קטנים יותר. הקו הרציף מתאר את מסלול החלקיק הגדול המבצע תנועה בראונית אקראית.

נדמיין שיכור הנע ימינה ושמאלה לאורך קו ישר, כאשר בכל מרווח זמן τ הוא מחליט לבצע צעד באורך a ימינה או שמאלה באופן אקראי. אם נחשב את ההסתברות $P(x, t)$ למצוא אותו במיקום x בזמן t, נמצא כי P מקיימת את משוואת הדיפוזיה (3), עם מקדם הדיפוזיה $D = a^2/(2\tau)$. אם מתהלכים על הקו שיכורים רבים, באופן בלתי תלוי, הרי שריכוזם במיקום x בזמן t יהיה מתכונתי להסתברות P למצוא חלקיק. משוואת הדיפוזיה (3) עבור הריכוז מתקבלת, אפוא, כתוצאה סטטיסטית ממהלכים בראוניים.

שאלה חשובה ביחס למהלך האקראי היא מהו המרחק האופייני אותו יעבור השיכור לאחר N צעדים, כלומר לאחר זמן $t = N\tau$. בכל צעד מיקומו משתנה ב- $\Delta x_n = \pm a$. לאחר N צעדים מרחקו מנקודת הפתיחה יהיה $X = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n$. זהו גודל סטטיסטי הנע בין $-Na$ לבין $+Na$. המרחק הממוצע $\langle X \rangle$ הוא אפס, כי אין העדפה לכיוון ימין או שמאל. את סטיית התקן ניתן לקבל מהממוצע של ריבוע הסכום, השווה במקרה זה לסכום ריבועי הצעדים, מאחר שהצעדים בלתי תלויים זה בזה,

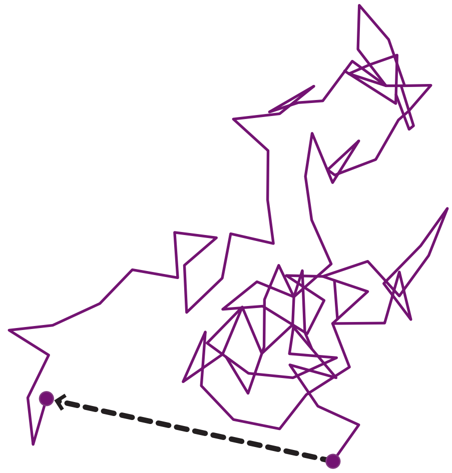
$$\langle X^2 \rangle = \left\langle \left(\Delta x_1 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n \right)^2 \right\rangle = Na^2 \qquad (7)$$

מכאן שסטיית התקן, הנותנת מדד סטטיסטי למרחק האופייני שהשיכור עבר לאחר N צעדים, היא $X_0 = \sqrt{\langle X^2 \rangle} = \sqrt{N}\,a = \sqrt{t/\tau}\,a$. זו תוצאה חשובה, האומרת כי המרחק האופייני בתהליך אקראי כמו דיפוזיה גדל רק על-פי השורש של מספר הצעדים או, במילים אחרות, לפי שורש הזמן. כשמציבים בביטוי זה את התוצאה $D = a^2/(2\tau)$, מקבלים $X_0 = \sqrt{2Dt}$. אם המהלך הוא תלת-ממדי, נקבל תוצאה דומה עבור כל אחד משלושת הצירים. אנו מוצאים, לסיכום, כי המרחק האופייני בתנועה בראונית תלת-ממדית מקיים

$$R_0 = \sqrt{\langle X^2 \rangle + \langle Y^2 \rangle + \langle Z^2 \rangle} = \sqrt{3N}\,a = \sqrt{6Dt} \qquad (8)$$

דוגמא למהלך בראוני (דו-ממדי) ניתנת באיור 2. כדי להמחיש את ההבדל בין מהלך בראוני לתנועה במהירות קבועה, נבחר חלקיק בקוטר מיקרון. לאחר מיליון צעדים, כל אחד באורך של מיקרון, יעבור החלקיק בתנועה בראונית מרחק אופייני של $R_0 = \sqrt{3N}\,a = \sqrt{3 \cdot 10^6} \cdot 10^{-6}m = 1.7\ mm$, בעוד שחלקיק הנע במהירות קבועה מיליון צעדים באותו כיוון יתקדם מרחק של $10^6 \cdot 10^{-6}m = 1m$, כלומר מרחק פי 600 גדול יותר! להמחשה נוספת, מקדם הדיפוזיה של חלקיק בעל קוטר של מיקרון הנמצא במים הוא $D \approx 4 \cdot 10^{-9}\ cm^2/sec$. פירוש הדבר הוא שבמשך שנייה אחת מתקדם החלקיק מרחק אופייני של $R_0 = \sqrt{6Dt} \approx 1.6\mu m$, כלומר מרחק מסדר גודל של קוטרו.

שני הניבויים העיקריים במאמרו של אינשטיין, משוואות (6) ו-(8), סיפקו דרך ישירה למדידת מספר אבוגדרו מתוך תצפית בתנועה בראונית ומכאן לאישוש התורה האטומית, כפי שיתואר בפרק הבא.



איור 2: דוגמה למהלך אקראי בראוני בן 100 צעדים במישור, אשר התקבל בעזרת סימולציית מחשב. החץ השחור מחבר את נקודת ההתחלה עם נקודת הסיום. שימו לב כמה קטן אורכו של החץ ביחס לאורך המסלול כולו. אם אורך הצעד הוא a, הרי שהמהלך כולו אורכו 100a. לעומת זאת, אם נייצר מהלכים רבים דוגמת זה שבתמונה ונחשב את שורש הממוצע של ריבוע החץ, נקבל אורך של כ- 14a בלבד.

ההוכחה הניסיונית של Perrin לתמונה האטומית: מדידת מספר אבוגדרו

מכיון שבתחילת המאה ה-20 אי אפשר היה "לראות" אטומים ומולקולות, היו חייבים המדענים להקיש על קיומם מתופעות פיסיקליות, הניתנות למדידה בסקאלות אורך מאקרוסקופיות או מזוסקופיות, אך שהסברן קשור באופן הדוק למציאות האטומית - כלומר למספר עצום של יחידות בסיס בדידות מהן בנוי החומר. גם לפני עבודותיו של אינשטיין היו הערכות ניסויות של מספר אבוגדרו, אך רק לאחר פרסום עבודתו בשנת 1905 נערכו מספר ניסויים (בעיקר בשנים 1908־1911) בהם נמדד N_A בדיוק רב. מכל הניסויים הללו ראוי לציין במיוחד את עבודותיו של המדען הצרפתי Jean Perrin כהוכחה הניסויית האולטימטיבית לתורתו של אינשטיין על התנועה הבראונית, ובעצם, כהוכחה לקיומם של אטומים ומולקולות. על עבודתו זו זכה Perrin בפרס נובל לפיסיקה בשנת 1926.

מכיון שלא הייתה אפשרות למדוד ישירות תנועה בראונית בסקאלות אטומיות, השתמש Perrin בתרחיף של גרגרי אבקה שהופקו מעץ המסטיק (Gamboge), בעלי צורה כדורית וגודל מיקרומטרי. ניתן לייצר תרחיף של חלקיקים כאלה בנוזל ולבחון את תנועתם בהגדלה של מיקרוסקופ אופטי. מניתוח מדויק של מסלולי החלקיקים הצליחו Perrin ועמיתיו לאשר את חוק חזקת החצי של התנועה הבראונית - כלומר, את העובדה שהמרחק האופייני שעובר החלקיק גדל לפי שורש הזמן (משוואה 8).

בנוסף - וזאת הייתה גולת הכותרת של ניסויים מהפכניים אלה - הצליח Perrin לקבל הערכה מדויקת למדי של מספר אבוגדרו, שהתאימה להפליא להערכות שהתקבלו מתופעות פיסיקליות שונות בתכלית - החל מקרינה תֶרמית של גופים חמים, דרך פיזור Rayleigh* של קרינת השמש על-ידי האטמוספרה (האפקט הגורם לצבעם הכחול של השמיים), וכלה ברדיואקטיביות.

יחס אינשטיין (6) מספק דרך למדידה ישירה של מספר אבוגדרו, וזאת עשה Perrin. את מקדם הדיפוזיה D מחשבים ממדידת הקשר בין המרחק R_0 שעובר החלקיק הבראוני לבין משך תנועתו t, דהיינו, ממשוואה (8). [ליתר דיוק, במיקרוסקופ אנו צופים למעשה בהטלה דו-ממדית של המהלך הבראוני התלת-ממדי, ואת המקדם 6 ב-(8) יש להחליף ב- 4.] מקדם החיכוך של חלקיק כדורי בעל רדיוס a, הנע בנוזל בעל צמיגות γ, ניתן על-ידי תורת הזרימה של נוזלים (נוסחת Stokes, 1851),

$$\gamma = 6\pi\eta a \qquad (9)$$

קבוע הגזים R היה ידוע ממדידות תרמודינמיות. קל לראות, אפוא, כי בטמפרטורה נתונה T ניתן לחשב את מספר אבוגדרו על ידי הצבה של כל יתר הגדלים ביחס אינשטיין (6). בשנת 1908 מצא Perrin שערכו של מספר אבוגדרו הוא $6.4 \cdot 10^{23}$, תוצאה הסוטה בכ-6% בלבד מן הערך הידוע כיום, $6.022 \cdot 10^{23}$.

תוצאות אלה הביאו כבר בשנת 1909 לאישוש סופי, גם בעיני גדולי הספקנים, של תקפות התמונה האטומית ולסתימת הגולל על אחת המחלוקות הטעונות בתולדות הפיסיקה. לפני שנעבור אל ההשלכות מרחיקות-הלכת של מאמרו של אינשטיין על המחקר בן-זמננו, הבה נסכם

* ראה הערה בסוף המאמר

את שלוש תרומותיו המרכזיות:

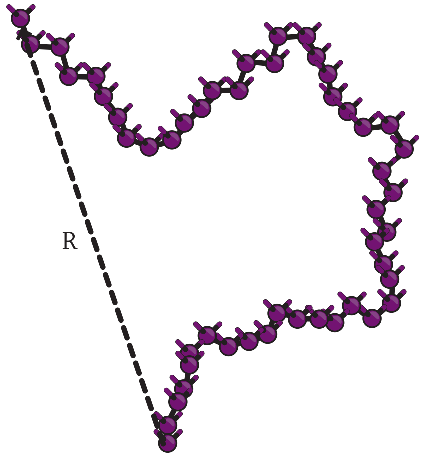
- מתן הסבר ממצה לתנועה הבראונית. ההסבר התבסס על ניתוח של מהלכים אקראיים והראה כי המרחק אותו עובר חלקיק בראוני גדל עם שורש הזמן. תיאור מהפכני זה של תנועה אקראית סלל את הדרך לתחום מדעי שלם של ניתוח מהלכים ואותות אקראיים.
- אישוש התמונה האטומית. המודל של אינשטיין חייב התייחסות אל הנוזל המקיף את החלקיק לא כאל תווך רציף אלא כמורכב ממולקולות, המתנגשות ללא הרף בחלקיק וגורמות לו לנוע במהלך אקראי. אינשטיין הראה כיצד מהלכים אקראיים אלה מתקשרים לתהליכי דיפוזיה, וכיצד ניתן למדוד מתוכם את מספר אבוגדרו.
- הקשר בין תנועה אקראית לחיכוך. במאמרו הוכיח אינשטיין את קיומו של קשר עמוק (יחס אינשטיין) בין מקדם הדיפוזיה לבין הטמפרטורה ומקדם החיכוך. בהמשך התברר כי יחס אינשטיין הוא מופע של חוק כללי יותר, הקושר בין תנודות אקראיות (תופעה מיקרוסקופית) לבין מקדמי חיכוך (מאפיין מאקרוסקופי של החומר). חוק זה, הקרוי משפט הפלקטואציה-דיסיפציה, הפך לאחת מאבני היסוד של הפיסיקה הסטטיסטית.

100 שנה לאחר אינשטיין: השלכות על מדע עכשווי

לאחר פרסום מאמרו של אינשטיין התקדם המדע הדן בתהליכים אקראיים ובבסיס הסטטיסטי של תופעות כמו דיפוזיה במהירות. שני חוקרים, אשר תרמו תרומות חשובות במיוחד והביאו את התחום אל רמת ההבנה המעמיקה של ימינו, היו הפולני Marian Smoluchowski והצרפתי Paul Langevin. כיום, למרות שחלפו מאה שנה מאז עבודותיהם של אינשטיין ועמיתיו, מהלכים אקראיים עדיין נחקרים בצורה נמרצת במגוון מפתיע של תחומי מדע וטכנולוגיה, ולא רק במדעי הטבע. בחרנו לסכם כאן מספר שימושים לדוגמה, ומתוכם נרחיב במיוחד על תחום הפולימרים.

פולימרים

פולימרים הם מולקולות ארוכות וגמישות הנמצאות בטבע בצורה של רב-סוכרים, דנ"א (DNA), חלבונים ועוד. החל מתחילת המאה ה-20 מופקים פולימרים גם כמוצרי לוואי של התעשייה הפטרוכימית ומהווים את הבסיס לכל מוצרי הפלסטיק שכה מאפיינים את החברה בת-ימינו. כל פולימר בנוי מאבני-בסיס (מונומרים) המחוברות בקשר כימי. כאשר מולקולת פולימר מומסת בנוזל, היא מתאפיינת בגמישות רבה, וכל תצורה מרחבית שלה נראית כמהלך אקראי (איור 3). מהלך זה דומה למהלך בראוני אך נבדל ממנו בתכונה חשובה: המהלך אינו יכול "לחתוך" את עצמו (self-avoiding walk), משום ששני מונומרים שונים אינם יכולים לתפוס את אותו המקום במרחב.



איור 3: תיאור סכימטי של מולקולת פוליאתילן המכילה 50 יחידות-בסיס (מונומרים). פולימרים שכאלה עשויים להכיל מספר גדול בהרבה של מונומרים. כאשר הם מומסים בתמיסה דלילה, הסטטיסטיקה של התצורות האפשריות שלהם שקולה לזו של מהלך אקראי שאינו חותך את עצמו. החץ השחור מחבר את קצות השרשרת ואורכו R.

ראשית ננתח את הסטטיסטיקה של פולימר "אידיאלי" (כלומר, נזניח את העובדה שהשרשרת אינה חותכת את עצמה). שרשרת זו מבצעת מהלך אקראי בעל סטטיסטיקה זהה לחלוטין לזו של תהליך דיפוזיה, ולכן התוצאות שקיבלנו קודם תקפות גם כאן. אורך המונומר שקול לאורך הצעד במהלך בראוני, ואורך השרשרת, L, שקול לזמן המהלך $t = N\tau$. כשם שהמרחק אותו מכסה המהלך הבראוני גדל עם שורש הזמן, כך הגודל האופייני של האיזור בתמיסה אותו תופס הפולימר גדל רק עם שורש מספר המונומרים,

$$R_0 \propto N^{1/2}a \qquad (10)$$

כאשר $N = 10^3 - 10^6$, גודל זה קטן משמעותית מאורכה הכולל של השרשרת, $L = Na$, הגדל באופן ליניארי עם N. לכך עלינו להוסיף הסתייגות חשובה, והיא העובדה,

שבניגוד למהלך בראוני, הפולימר הינו מהלך אקראי שאינו יכול לחתוך את עצמו. כבר בשנות ה- 40-50 של המאה הקודמת הראה מדען אמריקאי בשם פול פלורי (Flory), כי בשל תכונת אי-החיתוך העצמי, לשרשרת פולימרית בתמיסה יש התפלגות שונה מזו של מהלך בראוני, והיא מכסה במקרה זה אזור שגודלו האופייני עולה עם חזקה שונה של מספר המונומרים.

$$R_0 \propto N^{\nu} a \qquad \nu \approx 0.6 \tag{11}$$

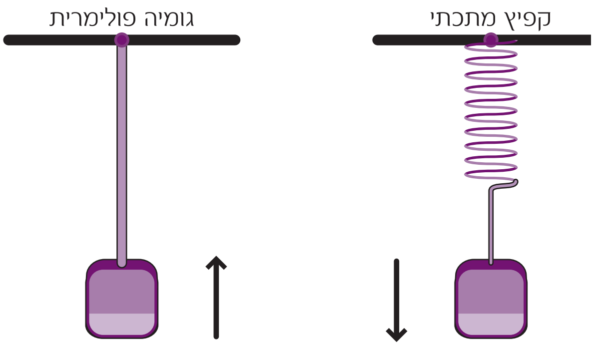
משמעותו של המעריך ν, השווה לכ-0.6 במקום הערך 0.5 עבור מהלך בראוני רגיל, היא כי לשרשרת פולימרית שאינה חותכת את עצמה יש גודל "תפוח" יותר מזה של מהלך בראוני בעל אותו האורך, כפי שמומחש באיור 4. לתכונת אי-החיתוך העצמי יש אפוא השלכות חשובות, המשנות את התנהגות הפולימר לעומת מהלכים אקראיים רגילים. על מחקריו החשובים בתחום הפולימרים קיבל פלורי את פרס נובל בכימיה לשנת 1974.

ב   א

איור 4: (א) דוגמה למהלך אקראי מישורי בן 100 צעדים, שאינו חותך את עצמו, כפי שהתקבל בעזרת מחשב. הסטטיסטיקה של מהלכים כאלה מתארת את התצורות השונות של מולקולת פולימר בתמיסה (איור 3). החץ השחור מחבר את נקודת ההתחלה עם נקודת הסיום. שימו לב שוב כמה קטן אורכו של החץ ביחס לאורך המסלול כולו. (ב) המהלך הבראוני הרגיל מוצג בשנית מתחת למהלך שאינו חותך את עצמו, באותו קנה-מידה. השוואה בין שני המהלכים מדגימה בבירור כיצד האיסור על חיתוך עצמי "מנפח" משמעותית את המרחב אותו מכסה המהלך האקראי.

מניתוח הסטטיסטיקה של "מהלכי" שרשרות הפולימר אפשר ללמוד רבות על תכונות פולימרים, הן עבור השרשרת הבודדת והן עבור חומר פולימרי המכיל מספר רב של שרשרות. נציין כאן תכונה חשובה (ללא הסבר מקיף) הקושרת בין ההתנהגות האלסטית של פולימרים לבין היותם מורכבים משרשרות ארוכות בעלות אנטרופיה תצורתית גדולה.

מכיוון ששרשרת הפולימר יכולה להיות ארוכה מאוד (אלפים ואפילו מאות אלפים של יחידות-בסיס) וגמישה, המגוון העצום של תצורות אפשריות של השרשרת (האנטרופיה שלה) בטמפרטורה סופית מכתיב חלק ניכר מן התכונות הפיסיקליות של החומר. תכונה זו מייחדת פולימרים לעומת חומרים רגילים. למשל, אנו רגילים לכך שחומר מוצק כמו מתכת נעשה קשיח פחות כאשר הוא מתחמם, ולכן קפיץ מתכתי תחת מאמץ של משקולת יתארך אם יחומם (ראו איור 5א). לעומת זאת, אם נחליף את הקפיץ בגומייה העשויה מחומר פולימרי, למרבה ההפתעה, הגומייה תתכווץ בחימום והמשקולת תעלה (איור 5ב). מאחר שתגובת החומר הפולימרי נובעת ברובה מן ההגבלה על התצורות האפשריות של שרשרות הפולימר, הרי שככל שהטמפרטורה גבוהה יותר, יהיה המחיר האנטרופי הכרוך במתיחה גבוה יותר, והגומייה תתקשח. במלים אחרות, הגומייה ניתנת לתיאור בקירוב טוב כ"קפיץ אנטרופי", שקבוע הקפיץ שלו מתכונתי לטמפרטורה.



א   ב

איור 5: (א) - קפיץ מתכתי תחת מאמץ של משקולת. בהשפעת חימום קשיחותו של הקפיץ תפחת והמשקולת תגרום לו, אפוא, להתארך. (ב) - גומייה פולימרית תחת אותו מאמץ. בהשפעת חימום הגומייה תתקשח ותתכווץ.

השלכות עכשוויות נוספות

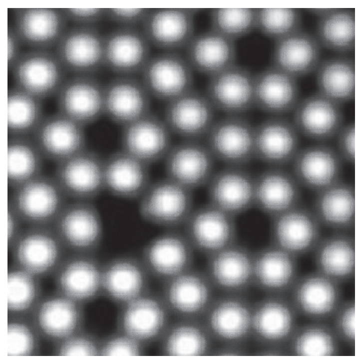
מהלכים אקראיים אנומליים: עבודתו של אינשטיין על תנועה בראונית פתחה תחום שלם בתורת ההסתברות הדן בתהליכים אקראיים. בעשורים האחרונים מתמקד

המחקר בתחום זה, בין השאר, במהלכים אקראיים היוצרים דיפוזיה אנומלית, כלומר, מהלכים בהם המרחק האופייני גדל עם הזמן שלא כמו $t^{1/2}$, אלא עם חזקה שונה מ-1/2,

$$R_0 \propto t^{\alpha} \qquad \alpha \neq 1/2 \tag{15}$$

מהלכים אקראיים כאלה, הנקראים מהלכי Lévy (על שם המהנדס והמתמטיקאי הצרפתי Paul-Pierre Lévy), נצפו, לדוגמה, בצורה בה ציפורים שונות עפות בחפשן אחר מזון. תהליכי דיפוזיה אנומלית נוספים נצפו לאחרונה בתנועה של מולקולות ביולוגיות בתוך התא, וכן בתופעות מגוונות כגון תנודות מזג-אוויר, פעפוע דרך סלעים ואי-סדירות בקצב הלב.

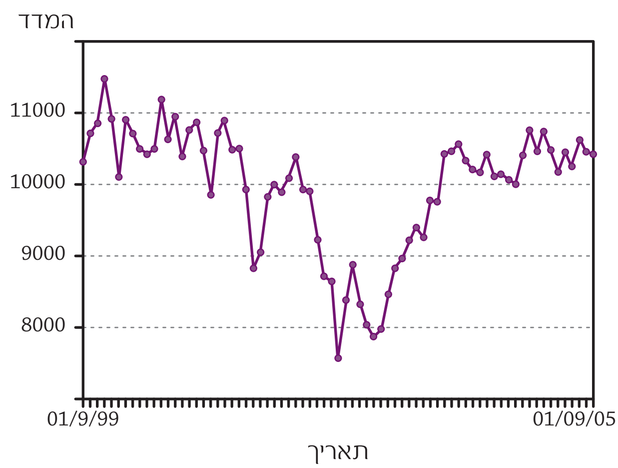
"לראות מולקולה אחת": אינשטיין ו-Perrin נאלצו להסיק על קיומן ותנועתן של מולקולות בודדות באופן עקיף מתוך תנועתו של חלקיק הגדול מהן פי 10,000. בשני העשורים האחרונים ביצע המדע קפיצת מדרגה בתחום המיקרוסקופיה, וכיום ניתן לצפות ישירות במולקולות ובאטומים בודדים, כפי שמודגם באיור 6.



איור 6: אטומים בודדים על פני משטח של גביש סיליקון, כפי שנצפו במיקרוסקופ מינהור סורק (STM). גודל התמונה הוא 5.4 ננומטר · 5.4 ננומטר. נלקח מאתר החברה Omicron Nanotechnology, http://www.omicron.de.

מהלכים אקראיים בכלכלה ובטכנולוגיה: תופעות אינספור בסביבתנו כוללות תנודות סטטיסטיות המזכירות מהלכים אקראיים. דוגמאות מובהקות לכך הן התנודות בשערי מטבע ומניות ובמדדים כלכליים שונים וכן שינויי אקלים על פני משכי זמן שונים. באיור 7 מוצגים, לדוגמה, השינויים במדד Dow Jones של המניות המובילות בבורסת המניות האמריקאית. "צעד הזמן" שנבחר (באופן שרירותי) הוא חודש אחד, ובתרשים ניתן לראות את "המהלך" של ערכי המדד מתחילת חודש אחד למשנהו החל ב-1 בספטמבר 1999 וכלה ב-1 בספטמבר 2005. הדמיון למהלך האקראי של השיכור, בו דנו קודם לכן, ברור. צעד של השיכור ימינה שקול לעליה במדד וצעד שמאלה - לירידה (או להיפך).

מובן כי מהלכים דוגמת זה של מדד Dow Jones מורכבים בהרבה ממהלך בראוני פשוט ורחוקים מהיות אקראיים לגמרי. עם זאת, כבר בתחילת המאה ה- 20, חמש שנים לפני מאמרו של אינשטיין, הצביע המדען הצרפתי Louis Bachelier על האפשרות לנתח שינויי שער בשוק ההון כמהלכים אקראיים. 70 שנה מאוחר יותר הציגו האמריקנים Fischer Black, Myron Scholes ו-Robert Merton מודל המנתח שערי מניות כמהלך אקראי הקרוי תנועה בראונית גיאומטרית. למודל זה נמצאו יישומים רבים, ו-Scholes ו-Merton זכו בעבורו בפרס נובל בכלכלה לשנת 1997. חברות השקעות וניתוח כלכלי משתמשות בשנים האחרונות יותר ויותר בכלי ניתוח השואבים השראה מתנועת החלקיקים של בראון ומתבססים על טכניקה של סימולציה ממוחשבת הנקראת דינמיקה בראונית.



איור 7: "מהלך" של מדד Dow Jones. כל נקודה מייצגת את ערך המדד בראשית החודש, החל מה-1 בספטמבר 1999 ועד ה-1 בספטמבר 2005. חברות השקעות וניתוח כלכלי משתמשות כיום בטכניקת סימולציה הקרויה דינמיקה בראונית כדי לנתח "מהלכים" שכאלה.

לתורה של מהלכים ואותות אקראיים יש גם יישומים טכנולוגיים רבים. דוגמה מובהקת מעולם התקשורת

האופטית היא תופעה הנקראת PMD (Polarization Mode Dispersion). כאשר אות מתקדם בסיב אופטי, הוא צובר עיוות הנובע מפגמים קלים בלתי נמנעים במבנה הסיב. צבירת העיוות היא תהליך אקראי המציית לאותם חוקים מתמטיים אותם ניסח אינשטיין עבור המהלך הבראוני, למשל, העיוות גדל לפי שורש הזמן.

אפילוג

למרות שמהפכתו השלישית של אינשטיין ידועה פחות בציבור, היו לה, ויש לה עדיין, השלכות מרחיקות לכת על המדע ועל יישומים רבים בחיי היומיום. על כן, ניתן אולי לומר בפרספקטיבה של מאה שנה, כי הייתה למהפכה זו השפעה נרחבת יותר מאשר שתי המהפכות האחרות, המפורסמות יותר, שחולל אינשטיין. עם הזמן נבעה ממנה תפישת עולם חדשה שבה האקראיות ממלאת תפקיד מרכזי. נסיים בציטוט ממאמרו של Mark Haw שהתפרסם בינואר 2005 בירחון Physics World בנושא דומה: "התנועה הבראונית הייתה מהפכה איטית אך מעמיקה יותר - לא התקפה חזיתית אלא מהלך אקראי אל תוך עתיד נרחב ומפתיע".

הערה מעמ' 8:

* פיזור Rayleigh הוא פיזור של קרינה אלקטרומגנטית מחלקיקים שגודלם קטן מאורך הגל של הקרינה - למשל, פיזור של אור ממולקולות החנקן והחמצן שבאוויר. מאחר שעוצמת הפיזור עומדת ביחס הפוך לחזקה הרביעית של אורך הגל, מתפזר האור הכחול (שהוא בעל אורך גל קטן יותר) הרבה יותר מאשר האור האדום, ועל-כן נראים השמיים כחולים כשאנו מביטים בכיוון שונה מכיוון הגעת האור (השמש). התופעה נחקרה לראשונה באופן איכותי על ידי לאונרדו דה וינצ'י בסביבות 1500, ובאופן דומה מאות שנים אחר כך, ב-1860, על ידי טינדל (John Tyndall). לורד ריילי היה הראשון שסיפק הסבר כמותי לתופעה שנים ספורות אחרי טינדל. אולם תורה ממצה, הכוללת חישוב של עוצמת הפיזור של אור ממולקולה, ניתנה שוב על-ידי... לא אחר מאלברט אינשטיין, ב-1911. מלבד התלות הנ"ל באורך הגל, תלויה עוצמת הפיזור כמובן גם בצפיפות המולקולות המפוזרות. מאחר שהצפיפות המספרית קשורה לצפיפות המולרית דרך מספר אבוגדרו, הרי שאם ידועה הצפיפות המולרית (למשל, דרך משוואת הגז האידיאלי), ניתן לקבל את מספר אבוגדרו ממדידת עוצמת הפיזור.

לקריאה נוספת

1. Einstein, A., Investigations on the Theory of Brownian Movement, Dover, 1956. Edited by R. Furth.

ספר זה מכיל את מאמריו של אינשטיין על תנועה בראונית, מתורגמים לאנגלית, וכן הערות רבות של העורך.

2. Pais, M., Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein, Oxford, 1982.

הביוגרפיה האולטימטיבית של אינשטיין. הספר מכיל הן ניתוח מדעי והן סקירה היסטורית על מכלול עבודותיו של אינשטיין.

3. Stachel, J. "Einstein's Miraculous Year", Princeton, 1998.

ספר זה מנתח את חמשת מאמריו המהפכניים של אינשטיין מ-1905.

4. Lindley, D., Boltzmann's Atom: The Great Debate that Launched a Revolution in Physics, Free Press, 2001.

לקריאה נוספת על מהפכת הפיסיקה הסטטיסטית והמחלוקת סביבה.

5. מרגונינסקי, י. מיקרוסקופ מינהור סורק ומיקרוסקופ כח אטומי, תהודה 18(1) עמ' 5, 1996.

6. המחשת ג'אווה המראה חלקיק בראוני בתווך של חלקיקים קטנים המתנגשים בו ללא הרף. ניתן לשלוט על מספר החלקיקים המתנגשים ועל גודלם היחסי.

http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/gas2D/gas2D.html

7. המחשת ג'אווה נוספת

http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/brownian/brownian.html

8. אתר של פרס נובל בפיסיקה לשנת 1926. מכיל את הביוגרפיה של PERRIN ואת הרצאת הנובל שלו המסכמת את ההוכחות לקיום העולם האטומי.

http://nobelprize.org/physics/laureates/1926/index.html

פרופ' דוד אנדלמן הוא חבר סגל בביה"ס לפיסיקה ואסטרונומיה ופרופ' חיים דימנט הוא חבר סגל בביה"ס לכימיה, באוניברסיטת תל אביב. מחקריהם כוללים תופעות פיסיקליות בחומרים מורכבים בעלי יישומים כימיים וביולוגיים.

דוד אנדלמן - andelman@post.tau.ac.il

http://star.tau.ac.il/~andelman

חיים דימנט - hdiamant@post.tau.ac.il

תהודה

מאמר זה הוא הרחבה של מאמר מאת אותם המחברים שפורסם בחודש דצמבר 2005 בירחון "גליליאו".